III. országos magyar matematikaolimpia
XXX. EMMV
megyei szakasz, 2020. január 18.

VIII. osztály

1. feladat. Határozd meg az összes olyan derékszögű háromszöget, melynek befogói $\overline{abab}$ és $\overline{cdcd}$ alakú négyjegyű számok, átfogójuk pedig 2020-szal egyenlő!

Zákány Mónika, Nagybánya

Megoldás. Ha a háromszög derékszögű, akkor érvényes Pitagorasz tétele:

$$\overline{abab}^2 + \overline{cdcd}^2 = 2020^2. \tag{1}$$

(**1 pont**)

Mivel négyjegyű számokról van szó, ezért $a \neq 0$, $c \neq 0$. (**1 pont**)

Az $\overline{abab}$ alakú szám így írható:

$$\overline{abab} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot a + b = 1010 \cdot a + 101 \cdot b = 101 \cdot (10a + b).$$ (**2 pont**)

Az (1) összefüggés a következő módon írható:

$$101^2 \cdot (10a + b)^2 + 101^2 \cdot (10c + d)^2 = 400 \cdot 101^2.$$ (**1 pont**)

Innen következik, hogy

$$(10a + b)^2 + (10c + d)^2 = 400,$$

ami a $100 \cdot (a^2 + c^2) + 20 \cdot (ab + cd) + b^2 + d^2 = 400$ összefüggéshez vezet. Mivel $b, d \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ és $a, c \in \{1, 2, \ldots, 9\}$, nyilvánvaló, hogy $a = 1$, $c = 1$. Tehát $(10 + b)^2 + (10 + d)^2 = 400$. (**2 pont**)
Az utóbbi egyenletnek csak két lehetséges megoldása van: $b = 2$, $d = 6$ vagy $b = 6$, $d = 2$. Tehát a derékszögű háromszögek befogói: 1212 és 1616. (**2 pont**)

Hivatalból (**1 pont**)

■

2. feladat. Egy halom kukoricaszemen hét hörcsög osztozkodik. Mindenki egyforma számú szemben szeretne részesedni, ellenben két megmaradt mag felett tanácstalanul állnak. Ekkor még egy társuk jelenik meg, akinek elmondják, hogyan jártak. Ő elkezd gondolkozni, és a következőt javasolja: ültessünk el négy szemet a jövő évi termés reményében, majd a megmaradt magokat osszuk el egyenlő arányban. Egyetértenek, kertészkedés után újra osztozkodnak. Megelégedetten nyugtázzák, hogy az osztás sikeres, igaz mindannyian hét szemmel kevesebb kukoricát fogyaszthattak így el. Hány mag volt eredetileg a halomban?

Hodgyai Edit, Micske
Bíró Zoltán, Gyergyószentmiklós

Megoldás. Legyen x az első, y pedig a második osztás során elnyert magok száma. (**1 pont**)
A két osztás során az össz-szemek száma

$$7x + 2 = 8y + 4. \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

Az egyénileg kapott kukoricaszemek száma a két osztás során

$$y = x - 7. \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

Az előbbi összefüggések felhasználásával rendre a következő ekvivalens átalakításokat végezhetjük:

$$\begin{aligned} 7x + 2 &= 8(x - 7) + 4, \\ 7x + 2 &= 8x - 56 + 4, \\ x &= 54, \end{aligned}$$

ahonnan az is következik, hogy $y = 47$. (**2 pont**)
A kukoricaszemek száma

$$7 \cdot 54 + 2 \quad \text{vagy} \quad 8 \cdot 47 + 4,$$

ami 380 darab. (**2 pont**)
Hivatalból (**1 pont**)
■

3. feladat. Az $ABCDA'B'C'D'$ szabályos négyoldalú hasábban $AB = BC = 6$ cm és $AA' = 8$ cm. Legyen az E, F és G pont a DD', AD, illetve DC élek felezőpontja.

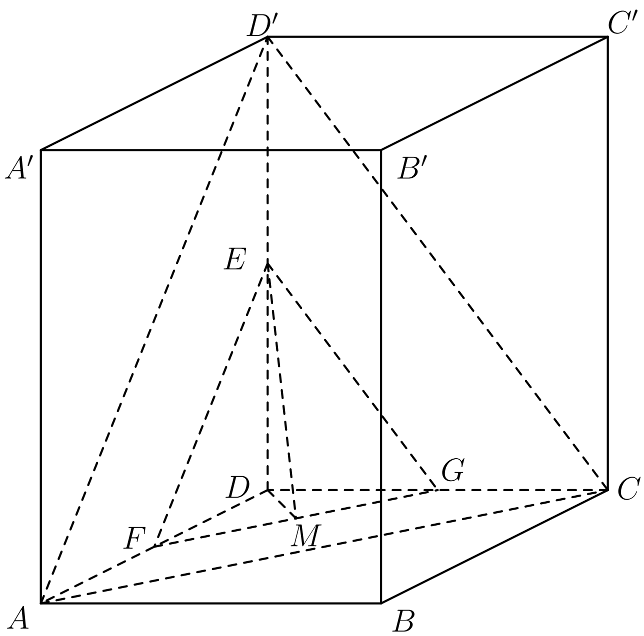
a) Igazold, hogy az (ACD') sík párhuzamos az (EFG) síkkal!

b) Számítsd ki az EFG háromszög területét, valamint az EFG és ACD' háromszögek területeinek arányát!

c) Határozd meg a $B'E$ szakasz hosszát!

Császár Sándor, Csíkmadaras
(Matlap)

Megoldás. A megoldáshoz tekintsük a következő ábrát és jelöléseit:



a) Mivel EF, FG és GE középvonal az ADD', ADC, illetve CDD' háromszögben, **(1 pont)**
következik, hogy $EF \parallel AD'$ és $EG \parallel CD'$, valamint $EF \cap EG = \{E\}$ és $AD' \cap CD' = \{D'\}$, tehát $(EFG) \parallel (ACD')$. **(1 pont)**

b) Az EFG háromszög egyenlő szárú, $EG = EF = \frac{AD'}{2} = \frac{10}{2} = 5$ cm. Másrészt, $FG = \frac{AC}{2} = 3\sqrt{2}$ cm. **(1 pont)**
Legyen M az FG szakasz felezőpontja. Következik, hogy EM oldalfelező és magasság az EFG háromszögben és

$$EM = \sqrt{25 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{82}}{2} \text{ cm.}$$ **(1 pont)**

Innen következik, hogy

$$T_{EFG} = \frac{FG \cdot EM}{2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{82}}{2}}{2} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{41}}{4} = \frac{3\sqrt{41}}{2} \text{ cm}^2.$$ **(1 pont)**

Mivel $EFG_\Delta \sim D'AC_\Delta$ és a hasonlósági arány $\frac{1}{2}$, ezért

$$\frac{T_{EFG}}{T_{D'AC}} = \frac{1}{4}.$$ **(1 pont)**

c) Mivel $DD' \perp (A'B'C')$, következik, hogy $DD' \perp B'D'$. **(1 pont)**

Az $ED'B'$ derékszögű háromszögben

$$B'E = \sqrt{D'E^2 + D'B'^2} = \sqrt{4^2 + (6\sqrt{2})^2} = \sqrt{16 + 72} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22} \text{ cm.}$$ **(2 pont)**

Hivatalból **(1 pont)**

■

4. feladat. Ha $2a - 16b - 7 = 0$ és $a \in [-\frac{25}{2}, \frac{7}{2}]$, akkor bizonyítsd be, hogy

$$\sqrt{(2a-7)^2 - 60b^2} + \sqrt{(2a+25)^2 - 60(b+2)^2} = 28.$$

Zákány Mónika, Nagybánya
Bíró Zoltán, Gyergyószentmiklós

Megoldás. A feltétel alapján $-25 \leq 2a \leq 7$. **(1 pont)**
Innen $2a - 7 \leq 0$, tehát $16b \leq 0$, vagyis $b \leq 0$, továbbá $2a + 25 \geq 0$. **(1 pont)**

Mivel $2a + 25 = 16b + 7 + 25 = 16(b+2)$, következik, hogy $b + 2 \geq 0$. **(2 pont)**
Legyen

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(2a-7)^2 - 60b^2} = \sqrt{(16b)^2 - 60b^2} = \sqrt{256b^2 - 60b^2} \\ &= \sqrt{196b^2} = 14|b| = -14b, \end{aligned}$$ **(2 pont)**

$$\begin{aligned} B &= \sqrt{(2a+25)^2 - 60(b+2)^2} = \sqrt{256(b+2)^2 - 60(b+2)^2} \\ &= \sqrt{196(b+2)^2} = 14|b+2| = 14(b+2) \end{aligned}$$ **(2 pont)**

Végül $A + B = -14b + 14(b+2) = 28$. **(1 pont)**
Hivatalból **(1 pont)**

■